Международный институт компьютерных технологий

Кафедра естественно-научных дисциплин

Методические рекомендации
к практическим занятиям
и самостоятельной работе

по дисциплине
«Математический анализ»

для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки **09.03.01** «Информатика и вычислительная техника», **11.03.02** «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», **13.03.02** «Электроэнергетика и электротехника», **10.03.01** «Информационная безопасность»

Воронеж 2016

УДК 512
Рецензент : канд. физ.-мат. наук, доцент Краснов Р.П. (МИКТ)

Составители : канд. физ.-мат. наук, доц. Чаплыгин А.В., д-р физ.-мат. наук, проф. Митрохин В. И., канд. физ.-мат. наук, доц. Ефимова М.А., ст.пр. Журавлёва О.В., ст.пр. Гребенникова А.К., ст. пр. Лукина В.Б.

Методические рекомендации к практическим занятиям и самостоятельной работе по дисциплине «Математический анализ» для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техни-ка», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 10.03.01 «Информационная безопасность»/ Сост. А.В.Чаплыгин, В.И. Митрохин, М.А. Ефимова, О.В. Журавлева, А.К. Гребенникова – Воронеж: Междунар. ин-т компьют. технологий. – 2016. – 51 с.

Методические указания соответствуют ФГОС ВО для технических специальностей по дисциплине «Математический анализ». Содержат указания по решению задач практических занятий, в соответствии с тематикой дисциплины, примеры решения задач практических занятий.

Предназначено для студентов технических специальностей очной и заочной форм обучения.

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой естественно-научных дисциплин, д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. Митрохин

Печатается по решению Методического совета Международного института компьютерных технологий

Учебное издание

Методические рекомендации
к практическим занятиям
и самостоятельной работе

по дисциплине
«Математический анализ»

для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки **09.03.01** «Информатика и вычислительная техника», **11.03.02** «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», **13.03.02** «Электроэнергетика и электротехника», **10.03.01** «Информационная безопасность»

Составители:
Чаплыгин Андрей Владимирович
Митрохин Виктор Иванович
Ефимова Марина Анатольевна
Журавлёва Ольга Владимировна
Гребенникова Антонина Константиновна
В авторской редакции

Компьютерный набор Л.П. Солодовниковой

Подписано в печать 15.09.2016.
Формат 60х80/16. Бумага для множительных аппаратов.
Усл. печ. л.0,0. Тираж00 экз.
Зак. № 000

Международный институт компьютерных технологий
394026 Воронеж, ул. Солнечная, 29 б

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Основной формой обучения студента является самостоятельная работа над учебным материалом, включающая его изучение по рекомендованным учебникам, решение задач с помощью учебных пособий, самопроверка и только затем - выполнение контрольных работ. Завершающим этапом изучения курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.д. Курс математического анализа разбит на темы и пункты, в которых указана литература, рекомендуемая для изучения.

Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь. В пособии имеется большое количество решенных задач, с которыми студентам следует ознакомиться при изучении соответствующего материала.

После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества задач рекомендуется воспроизвести по памяти определения, формулы, формулировки теорем. Необходимый минимум вопросов для самопроверки приводится.

Материал считается усвоенным при выполнении следующих требований: умении достаточно быстро и без помощи пособий решать задачи, аналогичные. твердом знание основных формул и определений, перечисленных в вопросах для самопроверки.

Если в процессе изучения теоретического материала или при решении задач у студентов возникают вопросы, справиться с которыми самостоятельно не удается, то за помощью можно обратиться к преподавателю на консультации.

2. ПРОГРАММА КУРСА “МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ” ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Введение в математический анализ

1. Понятие функции одного действительного переменного. Способы задания функции. Четность, нечетность, периодичность. Основные элементарные функции и их графики [1, т. I, гл. I, §§ 6 - 9], [2, раздел 3, гл. 2, §§ 1 - 4].

2. Предел переменной величины и предел функции. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. [1, т. I, гл. 2, §§ 1 - 5, 6 - 8], [2, раздел 3, гл. 2, §§ 1 - 4, 7 - 10].

3. Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций
[1, т. I, гл. 2, §§ 9, 10], [2, раздел 3, гл. 2, §§ 12 - 16].

4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых [1, т. I, гл. 2, §§ 4, 11], [2, раздел 3, гл. 2, §§ 5, 6].

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Производная суммы, произведения, частного. Производные основных элементарных функций [1, т. I, гл. 3, §§ 1 - 8, 10, 12], [2, раздел 4, гл. 1, §§ 1 - 7].

6. Производная сложной и обратной функций. Производные обратных тригонометрических функций. Таблица производных [1, т. I, гл. 3, §§ 9, 13 -15], [2, раздел 4, гл. 1, §§ 8 - 10].

7. Дифференциал функции. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал суммы, произведения, частного [1, т. I, гл. 3, §§ 20, 21], [2, раздел 4, гл. 1, §§ 11 - 13].

8. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница [1, т. I, гл. 3, §§ 22, 23], [2, раздел 4, гл. 1, § 14].

9. Теоремы Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталя [1, т. I, гл. 4, §§ 1, 2, 4, 5], [2, раздел 4, гл. 2, §§ 1, 5].

10. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Представление функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ по формуле Тейлора [1, т. I, гл. 4, §§ 6, 7].

Исследование функций с помощью производных

11. Условия возрастания и убывания функций. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции непрерывной на отрезке [1, т. I, гл. 5, §§ 1 - 6].

12. Исследование функций на выпуклость. Точки перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций [1, т. I, гл. 5, §§ 9 - 14].

Комплексные числа

13 Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи [1, т. I, гл. 7, § 1].

14. Действия с комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня [1, т. I, гл. 7, §§ 2,3].

Неопределенный интеграл

15. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой [1, т. I, гл. 10, §§ 1 - 4, 6].

16. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простые дроби. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций. Интегрирование

некоторых иррациональных выражений [1, т. I, гл. 10, §§ 5, 7 - 10, 12].

Определенный интеграл

17. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла [1, т. I, гл.11,§§1- 3].

18. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница [1, т. I, гл. 11, §§ 4].

19. Вычисление определенного интеграла интегрированием по частям и подстановкой. Приближенное вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона [1, т. I, гл. 11, §§ 5, 6, 8].

20. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхностей вращения [1, т. I, гл. 11, §§ 1, 3, 5, 6].

Несобственный интеграл

21. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Основные свойства [1, т. I, гл. 11, § 7].

Функции нескольких переменных

22. Функции нескольких переменных. Предел функции. Непрерывность [1, т. I, гл. 8, §§ 1-4].

23. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных [1, т. I, гл.8, §§ 5-7].

24. Частные производные высших порядков [1, т. I, гл. 8, § 12].

25. Производная по направлению. Градиент [1, т. I, гл. 8, §§ 14, 15].

25. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условие [1, т. I, гл. 8, § 17].

Дифференциальные уравнения

26. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные определения и понятия). Уравнения с разделяющимися переменными, однородные относительно x и y и линейные [1, т. 2, гл. 13, §§ 1-7].

27. Дифференциальные уравнения второго порядка. Общие свойства решения. Уравнения, допускающие понижение порядка [1, т.2, гл. 13, §§ 16-18].

28. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами [1, т.2, гл. 13, §§ 20,21].

29. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами [1, т.2, гл. 13, §§23-24].

Числовые и функциональные ряды

30. Числовые ряды. Сходимость ряда [1, т.2, гл. 16, § 1].

31. Необходимые и достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами [1, т.2, гл. 16, §§ 2,4,5,6].

32. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда [1, т.2, гл. 16, §§ 7,8].

33. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда [1, т.2, гл. 16, § 13].

34. Разложение функций в степенные ряды [1, т.2, гл. 16, § 16].

35. Тригонометрические ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье [1, т.2, гл. 17, §§ 1,2,4,5,6].

Кратные, криволинейные интегралы
и интегралы по поверхности

39. Двойной интеграл, его свойства и вычисление[1, т.2, гл.14, §§ 1-3].

40. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов [1, т.2, гл.14, § 4].

41. Двойной интеграл в полярных координатах [1, т.2, гл.14, § 5].

42. Криволинейный интеграл и его вычисление. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования [1, т.2, гл.15, §§ 1-4].

43. Поверхностный интеграл. Вычисление поверхностного интеграла. Формула Остроградского [1, т.2, гл.15, §§ 5-8].

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. Т. I, II.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. М.: Высшая школа, 1986. Ч. 1, 2.

3. Шипачев В.С. Задачи по высшей математике: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 1996.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение функции. Что называется областью определения функции, и каковы основные способы задания функции? Что называется графиком функции? Какие функции называются четными, нечетными, периодическими и каковы особенности их графиков?

2. Начертите графики основных элементарных функций.

3. Сформулируйте определение предела функции при стремлении аргумента к конечному пределу и при стремлении аргумента к бесконечности.

4. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?

5. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?

6. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?

7. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

8. Что такое первый и второй замечательные пределы?

9. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называются точками разрыва функции?

10. Сформулируйте определение производной. Каков ее механический и геометрический смысл?

11. Запишите формулы производных суммы, произведения, частного двух функций и таблицу производных.

12. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции и теорему о дифференцировании обратной функции.

13. Что такое логарифмическое дифференцирование?

14. Как находятся производные функций, заданных параметрическим образом?

15. Сформулируйте определение дифференциала функции. Каков его геометрический смысл?

16. Сформулируйте теоремы Ролля и Лагранжа. Каков их геометрический смысл?

17. В чем состоит правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей?

18. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в общем случае и для функции e^x, $\sin x$, $\cos x$.

19. Каковы признаки возрастания и убывания функции ?

20. Сформулируйте определение точки экстремума функции и два правила для отыскания точек экстремума.

21. Как находятся интервалы выпуклости и точки перегиба?

22. Какая линия называется асимптотой? Как находятся вертикальные и наклонные асимптоты?

23. Назовите основные пункты общей схемы исследования функций.

24. Дайте определение первообразной функции и неопределенного интеграла.

25. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла и напишите таблицу основных интегралов.

26. Запишите формулы замены переменной и интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

27. Запишите простейшие рациональные дроби и изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие.

28. Изложите методы интегрирования иррациональных выражений.

29. Изложите методы интегрирования тригонометрических выражений.

30. Что называется определенным интегралом и каковы его свойства?

31. Запишите формулу Ньютона - Лейбница для вычисления определенного интеграла.

32. Как производится интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле ?

33. Дайте определение несобственным интегралам.

34. Запишите формулы для вычисления площади криволинейной трапеции, длины дуги кривой и объема тела.

35. Что называется функцией двух переменных, ее областью определения? Дайте геометрическое толкование этих понятий.

36. Что называется функцией трех переменных, ее областью определения? Как можно геометрически истолковать область определения функции трех переменных?

37. Что называется пределом функции двух переменных в точке? В каком случае эта функция называется непрерывной в точке, в области?

38. Как определяются частные производные? Сформулируйте правила нахождения частных производных функции нескольких переменных.

39. Когда функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в данной точке?

40. Дайте определение частных производных высших порядков. Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных функции двух переменных.

41. Что называется производной от функции $z = f(x,y)$ в данной точке M_0 по направлению вектора $\boldsymbol{s}$? Выведите формулу для ее вычисления.

42. Что называется градиентом скалярной функции в данной точке?

43. Что называется максимумом (минимумом) функции двух переменных? Выведите необходимые и сформулируйте достаточные условия экстремума функции двух переменных.

44. Дайте определение комплексного числа. Запишите комплексное число в алгебраической и тригонометрической формах.

45. Определите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел.

46. Как производится возведение комплексного числа в натуральную степень и извлечение корня n – й степени.

47. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка и его общего и частного решения. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального

уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

48. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, укажите метод его решения.

49. Дайте определение однородного относительно x и y и линейного дифференциальных уравнений. Изложите методы нахождения их общего и частного решений.

50. Выведите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

51. Докажите теорему об общем решении неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

52. Изложите правило для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

53. Дайте определение сходящегося и расходящегося рядов.

54. Сформулируйте необходимый признак сходимости рядов.

55. Сформулируйте признаки Даламбера, Коши и интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Приведите примеры.

56. Дайте определение признака Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Приведите пример применения этого признака.

57. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов. Выведите формулу радиуса сходимости ряда.

58. Запишите формулы для коэффициентов ряда Фурье. Что называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области G? Укажите его геометрический смысл.

59. Что называется двукратным интегралом от функции $f(x,y)$ по области G? Как он вычисляется?

60. Выведите формулу для вычисления двойного интеграла в полярных координатах.

61. Что называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V? Укажите его механический смысл.

62. Что называется трехкратным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V? Как он вычисляется?

63. Обоснуйте формулу, служащую для вычисления объема тела с помощью тройного интеграла.

64. Что называется криволинейным интегралом по длине дуги плоской кривой?

65. Как вычисляется криволинейный интеграл по кривой, заданной параметрическими уравнениями и уравнением $y=f(x,y)$?

66. Что называется поверхностным интегралом? Напишите формулу Остроградского для вычисления поверхностного интеграла.

5. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

К задаче №1: [2, ч.1] №№ 641, 643, 645 - 650, 652, 658, 662, 664, 674, 697, 700.

К задаче №2: [2, ч.1] №№ 746, 748, 750, 752, 759, 761, 765, 769, 897, 908, 773, 778, 781, 782, 788, 796, 823, 846, 888, 902, 904, 910.

К задаче №3: [2, ч.1] №№ 1045, 1048, 1049, 1052, 1080 - 1082, 1087, 1096, 1097.

К задаче №4: [2, ч.1] №№ 1328, 1329, 1331 - 1335, 1352, 1353 - 1355, 1365, 1366, 1385 - 1388, 1403, 1404, 1406, 1409, 1420, 1422, 1472, 1474, 1475, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481.

К задаче №5: [2, ч.1] №№ 1592, 1593, 1626.

К задаче №6: [2, ч.1] №№ 1192, 1193, 1196, 1197, 1228, 1229, 1264, 1265, 1267, 1268, 1305, 1306.

К задаче №7: [2, ч.2] 507, 509, 510, 545,546, 596, 597, 600, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717.

К задаче №8: [2, ч.2] 286, 287, 288, 289, 290.

К задаче №9: [2, ч.2] 1, 2, 3, 4, 5, 26, 27, 28, 52, 53, 53.

К задаче №10: [2, ч.2] 182,183.

6. Практические занятия по теме «Предел функции»

Задача №1. Вычислить пределы функций.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)\cdot\left(x+1\right)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^3-3x-2\right)}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 6x}{8x}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{8x\cdot ctg 2x}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x^2+3x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+2}{2x^2}\right)^{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{25x}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{18x}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x}\right)^{x/2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{16x^2}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+12}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(x+1)}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x\cdot ctg8x}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+6}{6x}\right)^{6x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 2x}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos 10x}$.

1.11. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{75x}$.

1.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{15x}$.

1.13. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{\sin 7x}$.

1.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12}{x\cdot ctg4x}$.

1.15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg6x}$.

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{3\cdot(1-\cos 8x)}$.

1.17. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x-3}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+4}{4x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{x^2-16}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\cdot x^2}{\sin^2 x}$.

1.18. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot x^2}{1-\cos 8x}$.

1.19. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x}\right)^{2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{5x+12}-3}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 5x}{15\cdot\sin x}$.

1.20. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x+10}{10x}\right)^{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 81}\frac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{32\cdot x}$.

Практические занятия по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Задача №2. Найти производную y'_x функции.

2.1. а) $y = \sqrt[4]{4x-1}$; б) $y = \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+2}}$;

в) $y = \ln^5 arctg\, x$; г) $\begin{cases} x = \frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3). \end{cases}$

2.2. а) $y = \sqrt[3]{1-9x}$; б) $y = \dfrac{\cos 8x}{x^2}$;

в) $y = \ln^3 \arcsin x$; г) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tgt. \end{cases}$

2.3. а) $y = \sqrt{4x - x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3}{\cos 5x}$;

в) $y = \sin^3 x$; г) $\begin{cases} x = \arcsin(t), \\ y = \arccos(t). \end{cases}$

2.4. а) $y = \ln \sin x$; б) $y = \dfrac{1}{\arccos 15x}$;

в) $y = \left(arctg 2x\right)$; г) $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \sqrt[3]{(t)^2}. \end{cases}$

2.5. а) $y = \left(\cos x - x^3\right) \cdot e^x$; б) $y = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \arcsin \ln x$;

г) $\begin{cases} x = \ln(t), \\ y = \sqrt{t}. \end{cases}$

2.6. а) $y = \sqrt[3]{1 - 7x}$;

б) $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \left(\arccos \sqrt{x}\right)$;

г) $\begin{cases} x = \sqrt{2t}, \\ y = \arcsin(t). \end{cases}$

2.7. а) $y = \sqrt{1 + 3^x}$;

б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^{6x}}$;

в) $y = \arcsin(8x)$;

г) $\begin{cases} x = ctg(t), \\ y = \ln t. \end{cases}$

2.8. а) $y = tg(7x - 1)$;

б) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$;

в) $y = \sin^2(x)$;

г) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

2.9. а) $y = \left(1 - 6x^7\right)$;

б) $y = \dfrac{x^6}{\sqrt{\cos 3x}}$;

в) $y = tg^2(x)$;

г) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \sqrt{e^t}. \end{cases}$

2.10. а) $y = \ln(2x + 5)$;

б) $y = \dfrac{x^3 + 4^x}{\cos x}$;

в) $y = arctg^2(x)$;

г) $\begin{cases} x = \ln \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

2.11. а) $y=\left(\ln x\right)\cdot\cos\left(x-6\right)$; б) $y=\dfrac{tg4x}{\sqrt{x}}$;

в) $y=arctg5x$; г) $\begin{cases}x=\ln(t),\\ y=\arcsin 7t.\end{cases}$

2.12. а) $y=\left(\cos 5x\right)\cdot\arcsin\left(15x\right)$; б) $y=\dfrac{x^3-3^x}{\sin 6x}$;

в) $y=\ln^2\left(x\right)$; г) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=\sqrt{t}.\end{cases}$

2.13. а) $y=\left(x^3\right)\cdot tg\left(9x\right)$; б) $y=\dfrac{x^2-2^x}{\ln x}$;

в) $y=\cos^2\left(x\right)$; г) $\begin{cases}x=\sin 7t,\\ y=\arccos t.\end{cases}$

2.14. а) $y=\left(\cos 7x\right)\cdot e^{(x)}$; б) $y=\dfrac{\cos 4x}{\sin 2x}$;

в) $y=\ln\left(tg\left(x\right)\right)$; г) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=\ln t.\end{cases}$

2.15. а) $y=\left(\sin 4x\right)\cdot 3^{(x)}$; б) $y=\dfrac{2+\cos 8x}{\sin 3x}$;

в) $y=\ln\left(ctg\left(x\right)\right)$; г) $\begin{cases}x=(1+\cos^2 t),\\ y=\cos t.\end{cases}$

2.16. а) $y=\left(\cos 5x\right)\cdot\sqrt{x}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1}{\sin 2x}}$;

в) $y=arctg\sqrt{x}$; г) $\begin{cases}x=\ln(1-t),\\ y=\sqrt{t}.\end{cases}$

2.17. а) $y=(2x)\cdot\cos(4x)$;   б) $y=\dfrac{1}{1-\sin x^2}$;

в) $y=tg^2 5x$;   г) $\begin{cases} x=\arccos(t), \\ y=\arcsin(3t). \end{cases}$

2.18. а) $y=(arctg 2x+3x)(\sqrt{x}-4x+1)$;   б) $y=\dfrac{x^{2010}}{\sin 12x}$;

в) $y=ctg^3 x$;   г) $\begin{cases} x=1/\ln t, \\ y=\sin t. \end{cases}$

2.19. а) $y=x^2\cdot\left(e^{6x}\right)$;   б) $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$;

в) $y=\ln^2 x$;   г) $\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t}, \\ y=t^3. \end{cases}$

2.20. а) $y=\left(e^x+3\right)\cdot\cos x$;   б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$;

в) $y=arctg^{30} x$;   г) $\begin{cases} x=(\arcsin t), \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Задача №3. Провести полное исследование функции и построить ее график.

3.1. $y=(x^3+4)$ 3.11. $y=(1+1/x)$.

3.2. $y=1/(x-1)$.   3.12. $y=1/(x^2+12)$.

3.3. $y=2/(x)$.   3.13. $y=\left(9+6x-3x^2\right)$

3.4. $\mathrm{y}=1/\left(3+\mathrm{x}^2\right)$.   3.14. $y=-8/\left(x^2+4\right)$.

3.5. $y=12/\left(9+x^2\right)$. 3.15. $y=1/\left(x+1\right)$.

3.6. $y=-1/x^2$ 3.16. $y=1/x^3$.

3.7. $y=1/\left(x-4\right)$. 3.17. $y=1/\left(x+1\right)$.

3.8. $y=\left(2x^3+1\right)$. 3.18. $y=8/(x-1)$.

3.9. $y=3/x^2$. 3.19. $y=(1-2x^3)$.

3.10. $y=-1/(x-1)$. 3.20. $y=4/(x)$.

Практические занятия по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной»

Задача №4. Найти неопределенный интеграл.

4.1. а) $\int arctg5xdx$; б) $\int \frac{2+x}{\left(3+x^2\right)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; г) $\int \cos^2 3xdx$.

4.2. а) $\int x\cdot e^{4x}dx$; б) $\int \frac{x-4}{\left(x+2\right)\cdot\left(1+x^2\right)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; г) $\int \cos^2 5x\sin^2 5xdx$.

4.3. а) $\int x\ln 5xdx$; б) $\int \frac{1}{x\cdot\left(1+x^2\right)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; г) $\int \sin^4 xdx$.

4.4. а) $\int (1-x)\arccos 2xdx$; б) $\int \frac{x}{(x-1)\left(5+x^2\right)}dx$;

в) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}dx$; г) $\int \sin^3 4xdx$.

4.5. а) $\int x\cdot e^{3x}dx$; б) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x-2}-1}dx$; г) $\int \cos 6xdx$.

4.6. а) $\int arctg 4xdx$; б) $\int \frac{3x}{x(7+x^2)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}dx$; г) $\int \sin x\cdot\cos^2 xdx$.

4.7. а) $\int xarctgxdx$; б) $\int \frac{x+1}{(x)\cdot(x^2+2)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[6]{x^5}}dx$; г) $\int \cos 2x\sin^3 2xdx$.

4.8. а) $\int x\ln(x-5)dx$; б) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; г) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+4}dx$.

4.9. а) $\int (x+1)\cdot\cos 7xdx$; б) $\int \frac{1}{x^4+x^2}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+11}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx$; г) $\int \sin 3x\cos^5 3xdx$.

4.10. а) $\int x\ln(x^2+8)dx$; б) $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{x+4}+\sqrt[3]{x+4}}dx$; г) $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{1-\sin^2 7x}}dx$.

4.11. а) $\int \frac{arctgx}{x^2}dx$; б) $\int \frac{1}{(x-1)(3+x^2)}dx$;

в) $\int \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)\sqrt[3]{x+1}}dx$; г) $\int \sin 4x \cos^7 4x dx$.

4.12. а) $\int (x+2)e^{-5x}dx$; б) $\int \frac{1}{(x+1)(x+10)}dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1})}dx$; г) $\int \sin^2 x \cos x dx$.

4.13. а) $\int x\ln(1-9x)dx$; б) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x+1)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; г) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$.

4.14. а) $\int x^3 e^{x^2}dx$; б) $\int \frac{5x-2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+\sqrt[4]{x^3}-6x}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; г) $\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$.

4.15. а) $\int x^3 \sin(x^2)dx$; б) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+2)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; г) $\int \sin^2 \frac{x}{20}dx$.

4.16. а) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+2)}dx$;

в) $\int \frac{1}{(\sqrt{x+3}+3)\sqrt[3]{x+3}}dx$; г) $\int \cos\frac{x}{2}\sin^4\frac{x}{2}dx$.

4.17. а) $\int x\cdot\cos 8x dx$; б) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x+2)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}dx$; г) $\int \cos^2 5x \sin^4 5x dx$.

4.18. а) $\int (3x+4) arctgx dx$; б) $\int \frac{x^2+3x}{(x^2+1)(x+1)}dx$;

в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}dx$; г) $\int \cos x \sin^2 x dx$.

4.19. а) $\int x\ln(10-x)dx$; б) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x-8)}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4\sqrt[5]{x^2}+7}{\sqrt{x^3}}dx$; г) $\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}dx$.

4.20. а) $\int \frac{e^{\left(-x^2\right)}}{x^3}dx$; б) $\int \frac{3x+1}{(x^2+1)x^2}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}+2\sqrt[3]{x}-8x+1}{\sqrt{x}}dx$; г) $\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x+11}dx$.

Задача №5. Вычислить площадь фигур, ограниченных графиками функций для вариантов № 1-10; вычислить объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox для вариантов № 11-20.

5.1. $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0.$

5.2. $x=4-y^2,\ x=y^2-2y.$

5.3. $y = x,\ x = \sqrt{3},\ y = 0.$

5.4. $y = 2x - x^2, x = 0,\ x = 2.$

5.5. $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}, y = 0,\ x = 1.$

5.6. $y = (x-2)^3,\ y = 4x - 8.$

5.7. $x = 4 - y^2,\ x = y^2 + 2y.$

5.8. $y = x\sqrt{9 - x^2},\ y = 0,\ (0 \le x \le 3).$

5.9. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}},\ y = 0, x = 1, x = e^3.$

5.10. $y = \cos x \sin^2 x,\ y = 0\ \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right).$

5.11. $y = x - x^2,\ y = 0.$

5.12. $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0.$

5.13. $y^2 = (x+4)^3,\ x = 0.$

5.14. $y = -x^2 + 8,\ y = x^2.$

5.15. $y = 2 - x^2,\ y = x^2.$

5.16. $x^3 = (y-1)^2,\ x = 0,\ y = 0.$

5.17. $xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0.$

5.18. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{1} = 1.$

5.19. $y = x^2,\ y = 1, x = 2.$

5.20. $y = 2x - x^2,\ y = 0.$

Практические занятия по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»

Задача №6. Даны: функция $z = f(x;y)$, точка A и вектор $\vec{a}$. Найти: 1) $grad\ z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$; 3) экстремум функции $z = f(x;y)$.

6.1. $z = x^2 - 3xy + 4y^2 - x + y$, $A(1;3)$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$;

6.2. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$, $A(2;1)$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$;

6.3. $z = 2xy - 4x - 2y$, $A(-1;2)$, $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$;

6.4. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - xy$, $A(4;-1)$, $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$;

6.5. $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$, $A(-2;5)$, $\vec{a} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$;

6.6. $z = x^3 - y^3 - 3xy$, $A(3;3)$, $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$;

6.7. $z = 2x^3 - xy^2 + 6x^2 + y^2$, $A(1;1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$;

6.8. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$, $A(5;-1)$, $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j}$;

6.9. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$, $A(-1;-3)$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$;

6.10. $z = 2xy - 4x - 2y$, $A(-6;1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$;

6.11. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$, $A(1;0)$, $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$;

6.12. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $A(-2;2)$, $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$;

6.13. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$, $A(4;3)$, $\vec{a} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$;

6.14. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $A(0;5)$, $\vec{a} = 6\vec{i} - \vec{j}$;

6.15. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $A(1;-1)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 9\vec{j}$;

6.16. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2yx$, $A(-5;-1)$, $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$;

6.17. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$, $A(4;-2)$, $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j}$;

6.18. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 9$, $A(-1;8)$, $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$;

6.19. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 2$, $A(0;-3)$, $\vec{a} = -\vec{i} + 7\vec{j}$;

6.20. $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y$, $A(6;-1)$, $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

Практические занятия по теме «Дифференциальные уравнения»

Задача №7. Найти общее решение дифференциального уравнения в пунктах а) и в), в пункте б) найти решение задачи Коши.

7.1. а) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$; б) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$;

в) $y'' + 2y' + y = e^x$.

7.2. а) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; б) $y' = x + y$, $y(0) = 3$;

в) $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

7.3. а) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; б) $y' + x^2 y = x^2$, $y(0) = 2$;

в) $y'' - 4y = 3e^{5x}$.

7.4. а) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; б) $xy' + y = 3$, $y(1) = 1$;

в) $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

7.5. а) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$; б) $xy' + y = e^x$, $y(1) = 1$;

в) $y'' + 3y' - 4y = 2\sin x$.

7.6. а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; б) $y' - \frac{3y}{x} = x$, $y(1) = 4$;

в) $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

7.7. а) $y^2 + x^2 y' = xyy'$; б) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$;

в) $y'' + 9y = 4xe^{3x}$.

7.8. а) $y' = \frac{y}{x - y}$; б) $y' + y = \cos x$, $y(0) = 1$;

в) $y'' + y' = e^{-x}$.

7.9. а) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$; б) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 2$;

в) $y'' - 2y' + y = x^2 + 1$.

7.10. а) $y' = \frac{3y^2 + 3xy + x^2}{x^2 + 2xy}$; б) $xy' + 2y = x^2$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + 4y = 5\cos 3x$.

7.11. а) $y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$; б) $y' + y\cos x = \sin 2x$, $y(0) = 1$;

в) $y'' - y = 3e^{8x}$.

7.12. а) $y' = \frac{x + y}{y - x}$; б) $y' + 2y = 4x$, $y(0) = 1$;

в) $y'' - 5y' + 6y = xe^{4x}$.

7.13. а) $y' = \frac{x + y}{y - x}$; б) $y' - ytgx = ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$;

в) $y'' + 6y' = 5\sin 7x$.

7.14. а) $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$; б) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 3e^{2x}$.

7.15. а) $y' = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

в) $y'' + 2y' + 5y = -14\cos 5x$.

7.16. а) $y' = \dfrac{x + y}{y - x}$; б) $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x-2)}{x}$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + 6y' + 13y = (1 + x)e^{2x}$.

7.17. а) $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$; б) $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$; $y(0) = \dfrac{2}{3}$

в) $3y'' - 2y' - 8y = 29\cos x$.

7.18. а) $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$; б) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$.

7.19. а) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$; б) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$;

в) $y'' + y' = xe^x$.

7.20. а) $y' = \dfrac{2y - x}{2x - y}$; б) $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$;

в) $y'' + 3y' = 9x$.

Практические занятия по теме «Ряды»

Задача №8. Исследовать сходимость числового ряда.

8.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

8.11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)^3}$.

8.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

8.12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

8.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

8.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

8.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$.

8.6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

8.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

8.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}$.

8.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+4}$.

8.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

8.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

8.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

8.15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$.

8.16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}$.

8.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4^n}$.

8.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

8.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 2^n}$.

8.20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n}$.

6. Практические занятия по теме «Интегральное исчисление функции нескольких переменных»

Задача №9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями.

9.1. $z=0$; $z=6-x$; $y=\sqrt{x}$; $y=2\sqrt{x}$.

9.2. $z=0$; $z=x^2+y^2$; $y=7-x$; $x=0$; $x=4$; $y=0$.

9.3. $z=0$; $z=5x$; $x^2+y^2=9$.

9.4. $z=0$; $z=-y+4x$; $y=x^2$.

9.5. $z=0$; $z=x+y+10$; $x^2+y^2=4$.

9.6. $z=0$; $z=\sqrt{x}$; $y=5-2x$; $y=1$.

9.7. $z=0$; $z=x^2$; $y=2x$; $x+y=9$.

9.8. $z=0$; $z=y^2$; $y=4-x^2$; $y=x+2$.

9.9. $z=0$; $z=x^2+y^2$; $x^2+y^2=4$.

9.10. $z=0$; $z=y$; $x=0$; $x=4$; $x^2+y^2=25$.

9.11. $z=0$; $z=x^2+y^2$; $y=x^2$; $y=1$.

9.12. $z=0$; $z=2x$; $y^2=4-x$.

9.13. $z=0$; $z=2x^2$; $y=x+3$; $y=5-x$.

9.14. $z=0$; $y=x$; $y=0$; $x=3$; $z=x^2+y^2$.

9.15. $z=0$; $y=\sqrt{3}x$; $y\geq 0$; $x>0$; $z+x^2+y^2=2$.

9.16. $z=0$; $z=4-x^2$; $y^2+x^2=4$.

9.17. $z=0$; $y^2+x^2=9$; $y=x$; $x\geq 0$; $y>0$; $z=4$.

9.18. $z=0$; $z=3x$; $y^2=2-x$.

9.19. $z=0$; $z=y^2$; $y=3x$; $x+y=8$.

9.20. $z=0$; $z=6-x-y$; $y^2+x^2=9$.

Задача №10. Вычислить криволинейный интеграл.

10.1. $\int\limits_{AB} xdy-ydx$ по кривой $y=x^3$ от точки (0; 0) до точки (2; 8).

10.2. $\int\limits_{AB} \sqrt{x}dx+\sqrt{y}dy$ по кривой $y=x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

10.4. $\int\limits_{AB} \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, где AB – прямая, соединяющая точки (1; 1) и (6; 8).

10.5. $\int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy$, где AB – прямая, соединяющая

точки
(0; 0) и (1; 1).

10.6. $\int\limits_{AB} xydx + (y - x)dy$ по кривой $y^2 = x$ от точки (0; 0) до

точки (1; 1).

10.7. $\int\limits_{AB} -x\cos ydx + y\sin xdy$, где AB – прямая,

соединяющая точки (0; 0) и (π; 2π).

10.8. $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy + y^2\right)dy$ по кривой $y = x^2$ от

точки (0; 0) до точки (3; 9).

10.9. $\int\limits_{AB} \left(\dfrac{x}{y}\right)dx + xdy$ по кривой $y = \ln x$ от точки (1; 0) до

точки (e; 1).

10.10. $\int\limits_{AB} x(y-1)dx + \dfrac{x^2}{2}dy$ по кривой $y = 2\sqrt{x}$ от точки (1;

2) до точки (4; 4).

10.11. $\int\limits_{AB} \left(x^2 - 2y\right)dx + \left(y^2 - 2x\right)dy$, где AB – прямая,

соединяющая точки (-4; 0) и (0; 2).

10.12. $\int\limits_{AB} x^2ydx - ydy$, где AB – прямая, соединяющая

точки
(-1; 0) и (0; 1).

10.13. $\int\limits_{AB} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$ по кривой $y = 2x^2$ от точки (0; 0)

до точки (1; 2).

10.14. $\int\limits_{AB}(x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где AB – прямая, соединяющая точки (1; 0) и (0; 1).

10.15. $\int\limits_{AB}\left(x^2+2y\right)dx+\left(y^2+2x\right)dy$, где AB – прямая, соединяющая точки (-4; 0) и (0; 2).

10.16. $\int\limits_{AB}xydx+2ydy$ по кривой $x^2+y^2=1(x\geq 0, y\geq 0)$ от точки (0; 0) до точки (1; 2).

10.17. $\int\limits_{AB}ydx-\frac{x}{y}dy$ по кривой $y=e^{-x}$ от точки (0; 1) до точки (-1; e).

10.18. $\int\limits_{AB}\left(x^2+2y\right)dx+\left(2x+y^2\right)dy$ по кривой $y=2-\frac{x^2}{8}$ от точки (0; 2) до точки (4; 0).

10.19. $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)dx+xydy$ по кривой $y=e^x$ от точки (0; 1) до точки (1; e).

10.20. $\int\limits_{AB}\left(x^2+y^2\right)(dx+2dy)$ по кривой $x^2+y^2=9(y\geq 0)$ от точки (3; 0) до точки (-3; 0).

7. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$.

Решение.

В числителе и знаменателе многочлены. Получается неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Для решения надо разложить числитель и знаменатель на множители и сократить.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)}=\frac{1}{2}$$

Пример 2. Вычислить $\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Решение. Неопределенность $\left\{1^\infty\right\}$. Для ее раскрытия преобразуем дробь и показатель степени так, чтобы затем воспользоваться вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=e^4\cdot 1=e^4.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

Решение. Дробь не является рациональной, т.е. в числителе или знаменателе есть корни. Получается неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Необходимо числитель и знаменатель умножить и разделить на сопряженное, и сократить.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=0.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{3x^2}$.

Решение. Неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Приводим дробь к виду, позволяющему воспользоваться первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{(4x)^2}\cdot 16=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

Пример 5. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$.

Следовательно, $D(f)=(\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$.

2. Определим точки пересечения графика с координатными осями. Единственной такой точкой будет $O(0,0)$.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность, периодичность. Имеем

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-f(x),$$

следовательно $f(x)$- нечетная.

При исследовании функции можно ограничиться значениями $x\geq 0$, а затем продолжить функцию, пользуясь свойством нечетности (симметрично относительно начала координат).

4. Исследуем функцию на наличие асимптот.

а) Вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty.$$

Следовательно, $x = \sqrt{3}$ - вертикальная асимптота.

б) Наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-3} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2-3} - x) = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ – наклонная асимптота.

5. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)' = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} = 0.$$

Критические точки первого рода: $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$.

Точки $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$ не могут быть точками экстремума, так как они не входят в область определения функции.

6. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную.

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-3}\right)'' = \left(\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}\right)' = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} = 0.$$

Существует одна критическая точка второго рода: $x_1 = 0$.

Найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости, и точки перегиба. Результаты исследования оформим в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

Таблица 1.

x	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	Не	–	0	+

				сущ.			
$f''(x)$	+	0	–	Не сущ.	+	+	+
$f(x)$	Убыв. Вогн.	Т. П. $f=0$	Убыв. Вып.	Не сущ.	Убыв. Вогн.	Min $f=4{,}5$	Возр. Вогн.

Используя полученные результаты, строим график, функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, точки перегиба и асимптоты.

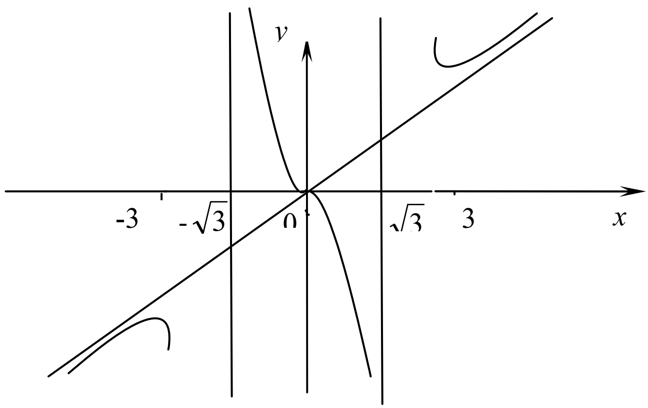


Рисунок 1.

Пример 6. Вычислить $\int arctgx dx$.

Решение. Положим $u = arctgx, dv = dx$.

Тогда $du = (arctgx)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$; $\int dv = \int dx, v = x$.

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int arctgxdx = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C .$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)}dx$.

Решение. Подынтегральная функция правильная рациональная дробь и ее можно разложить на сумму простейших дробей

$$\frac{x}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

где A, B, C, D - коэффициенты, подлежащие определению.

Умножая обе части равенства на $(x-2)^2\left(x^2+1\right)$, получаем

$$x = A\left(x^2+1\right) + B(x-2)\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-2)^2 .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая систему уравнений, получим $A = \frac{4}{5}; B = \frac{4}{25}; C = -\frac{4}{25}; D = -\frac{3}{25}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)}dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{4}{25}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{25}\int \frac{(4x+3)dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{4}{5(x-2)} + \frac{4}{25}\ln|x-2| - \frac{4}{25}\int \frac{xdx}{x^2+1} - \frac{3}{25}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{4}{5(x-2)} + \frac{4}{25}\ln|x-2| - \frac{2}{25}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \frac{3}{25}arctgx =$$

$$= -\frac{4}{5(x-2)} + \frac{4}{25}\ln|x-2| - \frac{2}{25}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{3}{25}arctgx + C .$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Решение. Положим $x=t^6$. Тогда $dx=6t^5$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int \frac{t^3dt}{t+1}.$$

Выделяя делением целую часть дроби, получим

$$6\int \frac{t^3dt}{t+1}=6\left[\int \left(t^2-t+1\right)dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Окончательно имеем

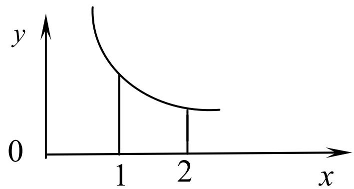
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

Пример 9. Вычислить $\int \sin^2 8xdx$.

Решение. Применим тригонометрическую формулу $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$. Тогда

$$\int \sin^2 8xdx=\frac{1}{2}\int \left(1-\cos 16x\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{32}\sin 16x+C.$$

Пример 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{1}{x};\ y=0;\ x=1;\ x=2$ (рис. 2).



Решение.

$S=\int_a^b f(x)dx=\int_1^2\frac{dx}{x}=$ Рисунок 2. $2-\ln 1=\ln 2$ (кв. ед.)

Пример 11. Сегмент параболы $y^2 = 4x$, отсекаемый прямой x=1, вращается вокруг оси Ox. Найти объём тела вращения.

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 12. Даны: функция $z = f(x; y)$, точка A и вектор $\vec{a}$. Найти: 1) $\overline{grad}\ z$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$; 3) экстремум функции $z = f(x; y)$:

$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$, $A(1;5)$, $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ **.**

Решение. 1) Первые частные производные функции $f'_x = 2x + y - 2, f'_y = x + 2y - 3$. Найдем частные производные функции в точке A: $f'_x\big|_A = 5, f'_y\big|_A = 8$. Тогда $\overline{grad}\ z = 5\vec{i} + 8\vec{j}$.

2) Для определения производной в точке A по направлению вектора $\vec{a}$ найдем для этого вектора

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-4}{\sqrt{9+16}} = -\frac{4}{5}.$$

Тогда производная функции в точке A по направлению вектора $\vec{a}$ имеет вид $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{17}{5}$.

3) Найдем точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

решения которой $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$. Следовательно, $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ - точка возможного экстремума.

Найдем вторые частные производные: $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 1, f''_{yy} = 2$.

Тогда $f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = 3$. Так как 3>0 и $f''_{xx} = 2 > 0$, то в точке $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ данная функция имеет минимум.

Пример 13. Решить задачу Коши $y' + 3y = e^{2x}$, $y(0) = -\frac{4}{5}$.

Решение. Данное уравнение является линейным. Найдем общее решение этого уравнения. Положим $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставляя y и y' в уравнение, имеем

$u'v + v'u + 3uv = e^{2x}$ или $u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}$.

Теперь потребуем, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль $(v' + 3v) = 0$, откуда $\frac{dv}{v} = -3dx; \ln|v| = -3x; v = e^{-3x}$.

Подставляя найденное значение v в оставленное уравнение, найдем $u'e^{-3x} = e^{2x}; du = e^{5x}dx; u = \frac{1}{5}e^{5x} + C$. Но $y = u(x)v(x)$, поэтому $y = e^{-3x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right)$ или $y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}$ - общее решение уравнения.

Найдем частное решение, подставляя начальное условие $y(0) = -\frac{4}{5}$ в общее решение уравнения, выражая C: $-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + C$, C=-1. Тогда $y = \frac{1}{5}e^{2x} - e^{-3x}$ - частное решение дифференциального уравнения.

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = 3, k_2 = -1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $\overline{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$. Частное решение исходного уравнения следует искать в виде $y^*=Ae^{4x}$ (так как в правой части коэффициентом при показательной функции служит многочлен нулевой степени и отсутствуют синус и косинус, а $\alpha=4$ не является корнем характеристического уравнения). Тогда $\left(y^*\right)'=4Ae^{4x}$, $\left(y^*\right)''=16Ae^{4x}$. Подставляя полученные выражения для производных в исходное уравнение, имеем $16Ae^{4x}-8Ae^{4x}-3Ae^{4x}=e^{4x}$. Отсюда $A=\frac{1}{5}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x}.$$

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Решение. Необходимый признак сходимости числового ряда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n!}$=0 выполняется. В качестве достаточного признака сходимости применим признак Даламбера

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=0$, 0<1, следовательно, ряд сходится.

Пример 16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=0$; $z=2-x^2$; $y=x^2$; $y=1-2x^2$.

Решение. Если область определена неравенствами

$a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, $0\le z\le z_1(x,y)$, то объем тела V находится по формуле

$$V = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} z_1(x, y) dy \,.$$

Для определения пределов интегрирования сделаем чертеж данного тела и его проекции на плоскость *XOY*.

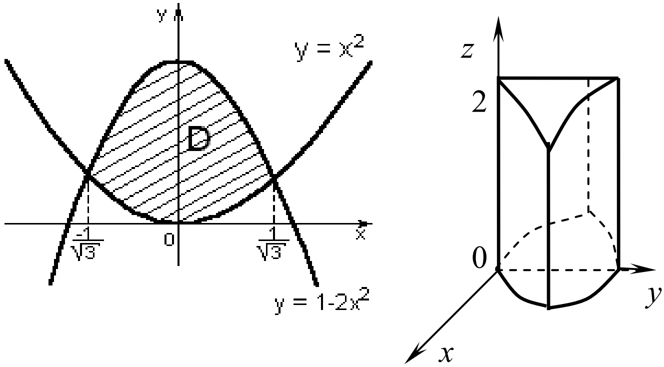


Рисунок 3.

Следует обратить внимание на то, что для переменной x границами являются ее наибольшее и наименьшее значения в заданной области, т.е. $-\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. Переменная y является функцией переменной x. На рисунке видно, что область D ограничена снизу кривой $y = x^2$, а сверху – кривой $y = 1 - 2x^2$. Следовательно, $x^2 \le y \le 1 - 2x^2$. Аналогично, из рисунка тела видно, что оно снизу ограничено плоскостью $z = 0$, а сверху поверхностью $z = 2 - x^2$. Таким образом, переменная z является функцией двух переменных x и y, и $0 \le z \le 2 - x^2$. Поэтому

$$V=\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}dx\int\limits_{x^2}^{1-2x^2}\left(2-x^2\right)dy=\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\left(2-x^2\right)\cdot y\Big|_{x^2}^{1-2x^2}dx=$$

$$=\int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}(2-x^2)(1-3x^2)dx=\left(2x-2x^3-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}=\frac{116\sqrt{3}}{135}.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}xdy+ydx$ по кривой $y=x^4$ от точки $A(0;0)$ до $B(2;16)$.

Решение. Сведем криволинейный интеграл к определенному, вычислив $dy=4x^3dx$. Тогда

$$\int\limits_{AB}xdy+ydx=\int\limits_0^2\left(x\cdot 4x^3+x^4\right)dx=5\int\limits_0^2 x^4dx=x^5\Big|_0^2=32.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ФОРМУЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$c' = 0, \quad c = const$

$x' = 1$

$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$

$\left(e^x\right)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a};$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1,$

â ÷àñò í î ñò è, $\int dx = x + C$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$

â ÷àñòí î ñòè, $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$

8) $\int \dfrac{dx}{x^{2} + a^{2}} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

9) $\int \dfrac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C, \quad |x| < a$

11) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(åñëè ïîäêîðåííîå âûðàæåíèå $x^2 - a^2$, òî $|x| > |a|$).